F-thresholds(Arc Spaces and Multiplier Ideals)

数理解析研究所講究録
第 1550 巻 2007 年 104-112

F-thresholds

渡辺　敬一 (日大・文理)
ノート 大関一秀 (明大・理工)

F-thresholds は正標数の環に対して Mustaţă により導入され，正則局所環の $\tau(I)$ の jumping number を記述したり，Bernstein-Sato 多項式 (b-関数) の根を計算するのに使える．

一方で環論的にも新しい道具としていろいろの応用の可能性を秘めていると思われる．本講演ではこれらの点を解説したい．

"F-threshold" という名前は "F-pure threshold" から来ているので，まず F-pure threshold の解説から始める．

§1. F-pure thresholds

ここで扱う環は標数 $p>0$ のネーター環で，整域とする．また Frobenius 写像 $F: A \to A$, $F(a)=a^p$ は有限射 ($A^{1/p}$ は有限生成 A 加群) とする．なお，以下において文字 q は常に p のベキ $q=p^e$ を表す．イデアル $I \subset A$ に対して $I^{[q]}$ を $\{a^q \mid a \in I\}$ で生成されたイデアルとする．

Definition 1. イデアル $I \subset A$, $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し，(1) 組 (A, I^s) が F-pure $\Longleftrightarrow \forall q \gg 1, \exists c \in I^{\lfloor s(q-1) \rfloor}$, s/t $A \to A^{1/q}, 1 \to c^{1/q}$ が A-hom として split.

(2) 組 (A, I^s) が strongly F-regular $\Longleftrightarrow \forall d \neq 0 \in A, \exists q \gg 1, \exists c \in I^{\lceil sq \rceil}$ s/t $A \to A^{1/q}, 1 \to (dc)^{1/q}$ が A-hom として split. [1]

(3) $c(I)=c(A,I)=\sup\{s \mid (A,I^s)$ が F-pure$\} = \sup\{s \mid (A,I^s)$ が strongly F-regular$\}$ とおき，$c(I)$ を I の F-pure threshold という．

$c(I)$ を計算するのに，次の補題が本質的である．

Lemma 1. ([HR]), $(A, \boldsymbol{m})$ Noetherian local ring, M: 有限生成 A 加群のとき $\phi: A$-hom $A \to M$ が split mono $\Longleftrightarrow \phi \otimes 1: A \otimes_A E \to M \otimes_A E$ が単射．ここで $E=E_A(A/\boldsymbol{m})$ は $A/\boldsymbol{m}$ の入射閉包．

Remark 1. $c(I) = \sup\{s \mid \tau(I^s) = A\}$ である．なぜなら，$\tau(I^s)=A \Longleftrightarrow 0_E^{*I^s} = (0) \Longleftrightarrow [z \in E, \exists d \neq 0, dI^{\lceil sq \rceil}z^q = 0 \Longrightarrow z=0] \Longleftrightarrow (A, I^s)$ が strongly F-regular. ($\tau(I^s)$ については本報告集の吉田健一さんの項を参照．)

例を計算するのに，次が役立つ．

Lemma 2. (1) $(A, \boldsymbol{m})$ が正則のとき，$A \to A^{1/q}, 1 \to c^{1/q}$ が split$\Longleftrightarrow c \notin \boldsymbol{m}^{[q]}$. 従って，

$$c(I) = \lim_{q \to \infty} \frac{\max\{r \mid I^r \not\subset \boldsymbol{m}^{[q]}\}}{q}$$

[1] ここで $\lceil * \rceil$ は少数部分の切り上げ，$\lfloor * \rfloor$ は切捨てを示す．

右辺の値を $\nu_I^{\boldsymbol{m}}(q)$ と書く.

$$\nu_I^{\boldsymbol{m}}(q) = \max\{r \mid I^r \not\subset \boldsymbol{m}^{[q]}\}.$$

(2) $(A, \boldsymbol{m}) = (B, \boldsymbol{n})/\boldsymbol{a}$, B が正則, $I = JA$ のとき, (A, I^s) が F-pure $\Longleftrightarrow$ $J^{\lfloor s(q-1)\rfloor}[\boldsymbol{a}^{[q]} : \boldsymbol{a}] \not\subset \boldsymbol{n}^{[q]}$.

いくつかの例を計算して見よう.

Example 1. $f = x^2 + y^3 \in k[[x,y]], I = (f)$ とすると,

$$c(I) = \begin{cases} \dfrac{5}{6} & (p \equiv 1 \mod 3) \\ \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6p} & (p \equiv 2 \mod 3) \end{cases}$$

である. 実際, $q = 6m+1$ のとき, $(x^2+y^3)^{5m}$ の展開式に $(xy)^{q-1}$ が現れ, $c(I) = \lim_{m\to\infty} \dfrac{5m}{6m+1} = \dfrac{5}{6}$ となる.

$p = 6m+5$ のとき, $(x^2)^{3m+2}(y^3)^{2m+1}$ が $\boldsymbol{m}^{[q]}$ に属さない最高べキなので, $\nu_I^{\boldsymbol{m}}(p) = 5m+3$ である. また, $((x^2+y^3)^{5m+3})^p(x^2+y^3)^{p-1} \not\in \boldsymbol{m}^{p^2}$ なので $\nu_I^{\boldsymbol{m}}(p^2) = (5m+3)p+(p-1)$, 以下同様に $\nu_I^{\boldsymbol{m}}(p^e) = (5m+3)p^{e-1}+(p^{e-1}-p^{e-2})+(p^{e-2}-p^{e-3})+\ldots+(p-1) = (5m+4)p^{e-1}-1$ だから, $c(I) = \lim_{m\to\infty} \dfrac{(5m+4)p^{e-1}-1}{(6m+5)p^{e-1}} = \dfrac{5m+4}{6m+5} = \dfrac{5p-1}{6p}$.

Example 2. $A = k[[x,y,z]]/(x^2+y^3+z^5), I = \boldsymbol{m} = (x,y,z)$ とおく. Lemma 2 (3) により, $c(I) = \lim_{q\to\infty} \dfrac{\max\{r \mid I^r(x^2+y^3+z^5)^{q-1} \not\subset \boldsymbol{n}^{[q]}\}}{q}$. ここで $(B, \boldsymbol{n}) = k[[x,y,z]]$. $p = 6m+1$ のとき, $(x^2+y^3+z^5)^{q-1}$ の展開した項に $(x^2)^{3m}(y^3)^{2m}(z^5)^m$ があるので, $z^m(x^2+y^3+z^5)^{q-1} \not\in \boldsymbol{n}^{[q]}$ となり. $c(I) = \dfrac{1}{6}$ となる. 但し, $p = 6m+5$ の場合には $c(I) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3p}$ となる.

F-pure threshold $c(I)$ と lc threshold $lc(I)$ (log canonical threshold; 本講究録の高木氏の稿参照. 但し彼の記号は $lct(I)$) との間には次の関係がある.

Theorem 3.([HW],[TW]) R normal Noetherian ess. of finite type over k, $\mathrm{char}(k) = 0$, $I \subset R$ イデアル. (R_p, I_p) を (R, I) の mod p reduction とする. このとき, $c(R_p, I_p) \le lc(I)$ かつ R が log terminal のとき $\lim_{p\to\infty} c(I_p) = lc(I)$.

§2. F-thresholds

A を標数 $p > 0$ の Noether 環, $I, \boldsymbol{a}$ は A のイデアルで, $\boldsymbol{a} \subset \sqrt{I}$ なるものとする.

Definition 2. (1) $\nu_{\boldsymbol{a}}^I(q) = \max\{r \mid \boldsymbol{a}^r \not\subset I^{[q]}\}$.

(2) $c^I(\boldsymbol{a}) = \lim_{q\to\infty} \dfrac{\nu_{\boldsymbol{a}}^I(q)}{q}$ を $\boldsymbol{a}$ の I に関する **F-threshold** と云う.

上の定義でまず気になるのは極限の存在だが，それをしばらく置いておいて基本的性質を述べよう．

Remark 2. Lemma 2 から，$(A,\boldsymbol{m})$ が正則のとき，$c^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{a}) = c(\boldsymbol{a})$ であるが，そうでないとき，$c(\boldsymbol{a})$ と $c^I(\boldsymbol{a})$ とは関係がない．

Lemma 4. (1) $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{a}'$ のとき $c^I(\boldsymbol{a}') \geq c^I(\boldsymbol{a})$, $I \subset I'$ のとき $c^{I'}(\boldsymbol{a}) \leq c^I(\boldsymbol{a})$. $\boldsymbol{a}'$ が $\boldsymbol{a}$ 上 integral のとき $c^I(\boldsymbol{a}') = c^I(\boldsymbol{a})$.
(2) $\boldsymbol{a}$ が n 個の元で生成され，$\boldsymbol{a}^s \subset I$ のとき $c^I(\boldsymbol{a}) \leq sn$.

Remark 3. A が F-pure, 即ち，$A \subset A^{1/p}$ が split するとき，$r = \nu^I_{\boldsymbol{a}}(q), x \in \boldsymbol{a}^r, x \notin I^{[q]}$ のとき $x^{q'} \notin I^{[qq']}$ である．($A^{1/q} \hookrightarrow A^{1/qq'}$ が $A^{1/q}$-hom として split するから，$x^{1/q} \in IA^{1/qq'}$ より $x^{1/q} \in IA^{1/q} = (I^{[q]}A)^{1/q}$.) ゆえに $\nu^I_{\boldsymbol{a}}(qq') \geq q'\nu^I_{\boldsymbol{a}}(q)$ となり，$\dfrac{\nu^I_{\boldsymbol{a}}(q)}{q}$ は増加列になる．上限があるので，極限が存在する．
$(A,\boldsymbol{m})$ が局所環，A の test ideal $\tau(A)$ が $\boldsymbol{m}$-primary のとき，$\nu^I_{\boldsymbol{a}}(qq') \geq q'\nu^I_{\boldsymbol{a}}(q) - N$ となる，q によらない N が存在するので，やはり極限の存在が示せる．一般の場合は open である．
今まで我々が計算した F-threshold は有理数だが，いつも有理数になるかどうかはわからない．

Example 3. 簡単な F-threshold の例を計算して見よう．
(1) $(A,\boldsymbol{m})$ が d 次元の局所環で,$J = (x_1,\ldots,x_d)$ が parameter ideal とする．このとき $\nu^J_J(q) = d(q-1)$ である．実際 $(x_1\cdots x_d)^{q-1} \notin J^{[q]}, J^{d(q-1)+1} \subset J^{[q]}$ である．ゆえに $c^J(J) = d$ である．一般に I の analytic spread が l のとき，$c^I(I) \leq l$ である．
(2) $A = k[[X_1,\ldots,X_d]]$, $J = (X_1^{n_1},\ldots,X_d^{n_d}), \boldsymbol{a} = (X_1^{a_1},\ldots,X_d^{a_d})$ のとき

$$c^J(\boldsymbol{a}) = \frac{n_1}{a_1} + \ldots + \frac{n_d}{a_d}$$

である．
(3) $A = k[[x,y,z]]/(x^2+y^3+z^5), J = (y,z), \boldsymbol{a} = (x,z)$ とおくと，$c^J(\boldsymbol{a}) = \dfrac{5}{3}, c^{\boldsymbol{a}}(J) = \dfrac{5}{2}$ である．

F-threshold を用いて $(A,\boldsymbol{m})$ が正則のとき，$\tau(I^s)$ の jumping coefficient を記述できる．($\tau(I^s)$ は標数 0 の multiplier ideal に対応する標数 $p>0$ の概念である．本報告集の吉田健一氏，原伸生氏の項を参照．)

Thorem 5. $(A,\boldsymbol{m})$ 正則局所環，$\boldsymbol{a} \subset \sqrt{J} \subset \boldsymbol{m}$ とする．このとき
(1) $\tau(\boldsymbol{a}^{c^J(\boldsymbol{a})}) \subset J$.
(2) $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$\boldsymbol{a} \subset \sqrt{\tau(\boldsymbol{a}^\alpha)}$ であり，$c^{\tau(\boldsymbol{a}^\alpha)}(\boldsymbol{a}) \leq \alpha$ である．
(3) ゆえに $J \longrightarrow c^J(\boldsymbol{a}), \alpha \longrightarrow \tau(\boldsymbol{a}^\alpha)$ によって $\boldsymbol{a}$ の test ideals と $\boldsymbol{a}$ の F-thresholds の間に bijention ができる．

[証明] (1) $\alpha = c^J(\boldsymbol{a})$ とおく．$\tau(\boldsymbol{a}^\alpha) \subset J \Longleftrightarrow 0^{*\boldsymbol{a}^\alpha}_E \supset [0:_E J] \Longleftrightarrow [z \in E, Jz = 0 \Longrightarrow$

$\exists c \neq 0, c\boldsymbol{a}^{q\alpha}z^q = 0$]. しかし $\alpha = \lim \dfrac{\nu_{\boldsymbol{a}}^J(q)}{q}$ より，$\exists c \neq 0, c\boldsymbol{a}^{q\alpha}z^q \subset J^{[q]}$ より (ここの議論は "$\boldsymbol{a}$-test element" の存在が必要だが) 上の主張が正しい.

(2) $c^{\tau(\boldsymbol{a}^\alpha)} \leq \alpha \iff \forall q \gg 1, \boldsymbol{a}^{q\alpha} \subset \tau(\boldsymbol{a}^\alpha)^{[q]} \iff \forall q \gg 1, \forall z \in 0_E^{*\boldsymbol{a}^\alpha}, \boldsymbol{a}^{q\alpha}z^q = 0$ だが, $0_E^{*\boldsymbol{a}^\alpha}$ の定義より $\exists c \neq 0, cz^q\boldsymbol{a}^\alpha = 0$ となり主張が示せる.

(3) $\alpha = c^J(\boldsymbol{a})$ とする. (1) により $\tau(\boldsymbol{a}^\alpha) \subset J$ であるから $\alpha = c^J(\boldsymbol{a}) \leq c^{\tau(\boldsymbol{a}^\alpha)}(\boldsymbol{a})$. 一方, (2) により $c^{\tau(\boldsymbol{a}^\alpha)}(\boldsymbol{a}) \leq \alpha$ だから $c^{\tau(\boldsymbol{a}^\alpha)} = \alpha$ である. また, $J = \tau(\boldsymbol{a}^\alpha)$ とおくと, (2) により, $\beta = c^J(\boldsymbol{a}) \leq \alpha$ である. (1) により $J \supset \tau(\boldsymbol{a}^\beta) \supset \tau(\boldsymbol{a}^\alpha) = J$ だから, $J = \tau(\boldsymbol{a}^\beta)$ である. これで 1 対 1 対応が示せた.

注. A が F-finite ($A^{1/p}$ が有限生成 A 加群) な正則局所環のとき, Blickle, Mustaţă, Smith が $c^J(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{Q}$ (jumping coefficient の有理性) と, 与えられた $\boldsymbol{a}$ に対して $\{c^J(\boldsymbol{a}) \mid J \subset A\}$ が離散集合であることを示している. ([BMS] 参照, また本報告集の吉田健一氏の稿も参照.)

Example 4. (1) $(A, \boldsymbol{m})$ 正則局所環, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m}$ とする. I が $\boldsymbol{m}$-primary ideal, $a(I) := \max\{i \mid \boldsymbol{m}^i \not\subset I\}$ とおくとき, $c^I(\boldsymbol{m}) = a(I) + d$. 特にどんな I に対しても $c^I(\boldsymbol{m}) \in \mathbb{Z}$ である.

実際, $a \in \boldsymbol{m}^a, x \not\in I$ を取ると A が正則のとき $F : A \to A$ は flat だから $((x^q) + I^{[q]})/I^{[q]} \cong A/\boldsymbol{m}^{[q]}$ で, $(x_1 \cdots x_d)^{q-1}x^q \not\in I^{[q]}$ である. ゆえに $\boldsymbol{m}^{aq+d(q-1)} \not\subset I^{[q]}$. 一方 $\boldsymbol{m}^{aq+d(q-1)+1} \subset (\boldsymbol{m}^{[q]})^{a+1} = (\boldsymbol{m}^{a+1})^{[q]} \subset I^{[q]}$ だから $c^I(\boldsymbol{m}) = a(I) + d$ が示された.

(2) $\tau(\boldsymbol{m}^\alpha)$ を計算しよう. $A = k[[X_1, \ldots, X_d]], E = (X_1 \cdots X_d)^{-1}k[X_1^{-1}, \ldots, X_d^{-1}]$ とおこう. A の E への作用は

$$(X_1^{a_1} \cdots X_d^{a_d}) \cdot (X_1^{-b_1} \cdots X_d^{-b_d}) = \begin{cases} X_1^{a_1-b_1} \cdots X_d^{a_d-b_d} & (\forall i, a_i < b_i), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である. $r \in \mathbb{Z}$ に対して $\boldsymbol{m}^r X_1^{-b_1} \cdots X_d^{-b_d} = 0 \iff \sum b_i \geq r + d$ だから, $X_1^{-b_1} \cdots X_d^{-b_d} \in (0)_E^{\boldsymbol{m}^\alpha} \iff \sum b_i > \alpha$ であるので, $\tau(\boldsymbol{m}^\alpha) = \boldsymbol{m}^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - d}$ である.

ゆえに, $\forall I$ $\boldsymbol{m}$-primary, $\tau(\boldsymbol{m}^{c^I(\boldsymbol{m})}) = \boldsymbol{m}^{a(I)+1} \subset I$ である. また, $\tau(\boldsymbol{m}^\alpha) = \boldsymbol{m}^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - d}$ であるから, $a(\tau(\boldsymbol{m}^\alpha) = \lfloor \alpha \rfloor - d$ で, $c^{\tau(\boldsymbol{m}^\alpha)}(\boldsymbol{m}) = \lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha$ である.

Conjecture. $(A, \boldsymbol{m})$ local, $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{m}$-primary such that $\forall I$: $\boldsymbol{m}$-primary, $c^I(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{Z}$ とすると, A は regular, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m}$ である. (これはきっと易しい.)

§3. A conjecture on F-thresholds and multiplicity

de Fernex, Ein, Mustaţă は [DEM] で次の定理を示している.

Thorem 6. $(A, \boldsymbol{m})$ は標数 0 の体上本質的に有限生成な d 次元正則局所環, I が任意の $\boldsymbol{m}$-primary ideal のとき,

$$e(I) \geq \left(\frac{d}{lc(I)}\right)^d.$$

ここで, $lc(I)$ は I の lc-threshold, $e(I)$ はイデアル I の重複度.

この定理は後述するように,「標数p」で示すことが可能だが, 更に筆者はこの定理が「環論的」なものであると信じている. 更に F-threshold は2つのイデアルの相対的な「大きさ」を示すので, この定理も相対化が可能だと思う. そこで以下のような予想を立てた.

Conjecture 7. $(A, \boldsymbol{m})$ は標数 $p > 0$ の d 次元 Noetherian local ring, I が parameter ideal, $\boldsymbol{a}$ が任意の $\boldsymbol{m}$-primary ideal のとき,

$$e(\boldsymbol{a}) \geq \left(\frac{d}{c^I(\boldsymbol{a})}\right)^d e(I).$$

勿論, この予想は A が regular, $I = \boldsymbol{m}$ のときに, [dFEM] の定理を含む.

Example 5. (1) $A = k[[X_1, \ldots, X_d]], I = (X_1^{a_1}, \ldots, X_d^{a_d}), \boldsymbol{a} = (X_1^{b_1}, \ldots, X_d^{b_d})$ のとき, Ex 3 で見たように, $c^I(\boldsymbol{a}) = \dfrac{a_1}{b_1} + \ldots + \dfrac{a_d}{b_d}$ で, 予想は

$$e(\boldsymbol{a}) = b_1 \cdots b_d \geq \left(\frac{d}{\dfrac{a_1}{b_1} + \ldots + \dfrac{a_d}{b_d}}\right) a_1 \cdots a_d$$

だが, この不等式は

$$\frac{\dfrac{a_1}{b_1} + \ldots + \dfrac{a_d}{b_d}}{d} \geq \sqrt[d]{\frac{a_1 \cdots a_d}{b_1 \cdots b_d}}$$

と同値で, 後者は有名な「算術平均と幾何平均の不等式」である.

予想 7 の「応用」として次の予想がある.

Conjecture 8. $(A, \boldsymbol{m})$: 標数 $p > 0$ の d-次元 F-rational local ring または標数 0 の rational singularity で完全交差であるものとする. このとき A の重複度 $e(A) \leq 2^{d-1}$ である.

Briançon-Skoda の定理より, 上記の場合で $\boldsymbol{m}$ の minimal reduction J を取ると, $\boldsymbol{m}^d \subset J$ なので, この予想は次の予想から得られる.

Conjecture 8′. $(A, \boldsymbol{m})$: Artinian local, 完全交差とし, $\boldsymbol{m}^{s+1} = (0)$ とする. このとき $e(A) \leq 2^s$ である.

[予想 7 $\Longrightarrow$ 予想 8′ の証明] まず, 標数 0 の場合は重複度, $e(A)$ を変えずに標数 $p > 0$ に reduction を取れるので, 標数 $p > 0$ で示せば良い. $A = B/(f_1, \ldots, f_r), (B, \boldsymbol{n})$ 正則, $f_i \in \boldsymbol{n}^{n_i}, n_i \geq 2$ とし, $(x_1, \ldots, x_r)$ を B の regular parameter system とする. このとき $f_i = \sum a_{ij} x_j$ と書くと, $(f_1, \ldots, f_r) : \boldsymbol{n}$ は $\mathrm{Det}(a_{ij})$ で生成される. $a_{ij} \in \boldsymbol{n}^{n_i - 1}$ に取れるので, $s \geq \sum_{i=1}^r n_i - 1 \geq r$ である.

さて, $J = (f_1, \ldots, f_r)$ に対して予想 7 を使うと,

$$1 = e(\boldsymbol{n}) \geq \left(\frac{r}{c^J(\boldsymbol{n})}\right)^r e(J)$$

で $e(A)=e(J)$ で，また例 4 から，$\boldsymbol{m}^s \neq (0)$ とすると $c^J(\boldsymbol{n}) = s+r$ であるから，

$$e(J)=e(A)\leq \left(\frac{s+r}{r}\right)^r$$

が得られる．s を fix して r を $r \leq s$ という条件の下で動かすと，右辺は $r=s$ のとき最大値 2^s を取るので，予想 8′ が示せたことになる．

予想 7 は次のような言い換えができる．

Conjecture 9. $(A,\boldsymbol{m})$: 標数 $p>0$ の d-次元 local ring $J,\boldsymbol{a}$ がパラメーターイデアル，$q=p^e \gg 1$ のとき，$\boldsymbol{a}^r \subset J^{[q]}$ となる r に対して，

$$l_A(A/\boldsymbol{a}^r) \geq \frac{d^d}{d!} l_A(A/J^{[q]}) - O(q^{d-1}).$$

また，こういう言い換えもできる．

Conjecture 9′. $(A,\boldsymbol{m})$: 標数 $p>0$ の d-次元 local ring J がパラメーターイデアル，$q=p^e \gg 1$ のとき，ある **integrally closed** な $\boldsymbol{m}$-primary ideal I に対して $I \subset J^{[q]}$ ならば

$$l_A(A/I) \geq \frac{d^d}{d!} l_A(A/J^{[q]}) - O(q^{d-1}).$$

予想 9,9′ に於て $J^{[q]}$ はたった d 個の元で生成されたイデアルであるのに対して，$\boldsymbol{a}^r$ や整閉な I は $q \gg 1$ のとき非常に多くの生成元をもち，大変異なった形のイデアルである．だから $\boldsymbol{a}^r \subset J^{[q]}, I \subset J^{[q]}$ は非常に「遠い」と思われる．尤も予想),9′ には予想 7 が成り立って欲しいという願望がこめられているのは否定できないが．

なお，予想 9′ $\Longrightarrow$ 予想 9 は $I=\overline{\boldsymbol{a}^{r-d}}$ とおけば $I=\overline{\boldsymbol{a}^{r-d}} \subset \boldsymbol{a}^r$ で両者の colength の差は高々$O(q^{d-1})$ であることから従う．

[予想 9 $\Longrightarrow$ 予想 7 の証明] $l_A(A/\boldsymbol{a}^r) \geq \frac{d^d}{d!} l_A(A/J^{[q]}) - O(q^{d-1})$. で $l_A(A/\boldsymbol{a}^r) = e(A)\frac{r^d}{d!}, l_A(A/J^{[q]}) = e(J)q^d + O(q^{d-1})$ だから，不等式を q^d で割って $q \to \infty$ とすれば，

$$e(A)\frac{r^d}{d!q^d} \geq \frac{d^d}{d!} e(J)$$

を得る．$c^J(\boldsymbol{a}) = \lim_{q\to\infty} \frac{r}{q}$ であるから予想 7 が得られる．

予想 7 は次の特別な場合には正しい．

Theorem 10. $(A,\boldsymbol{m})$ は regular，ある regular parameter $(x_1,\ldots,x_d)$ に対して $J=(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})$ と書けるとき予想 7 は正しい．

Remark. 定理 10 は 2005 年 9 月に浜名湖カリアックで行われたシンポジウム “Singularity Theory and Commutative Algebra” の際に T. de Fernex に suggest されたものである．そのときには証明については議論しなかったが，多分翌日にはそこにいた 3 人 (de

Fernex, 高木, 渡辺) とも何らかの証明を持っていた. 示唆を与えてくれた de Fernex 氏に感謝する.

[定理 10 の証明] $A = k[[X_1, \ldots, X_d]]$ として良い. $J = (X_1^{n_1}, \ldots, X_d^{n_d})$ とおく. $\boldsymbol{a}$ を任意の $\boldsymbol{m} = (X_1, \ldots, X_d)$ 準素イデアルとする. $\boldsymbol{a}$ の生成元は多項式として良い.

ある単項式順序を決め, それに関する initial ideal を in で書くことにする. $e(\boldsymbol{a}) = e(\mathrm{in}(\boldsymbol{a}))$ である. J が単項式で生成されるイデアルのとき, 他のイデアル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a} \subset J$ ならば $\mathrm{in}(\boldsymbol{a}) \subset J$ は明らかである. また, $\mathrm{in}(\boldsymbol{a})^r \subset \mathrm{in}(\boldsymbol{a}^r)$ が成り立つ.

ゆえに, J が単項式で生成されるとき $\boldsymbol{a}^r \subset J^{[q]}$ ならば

$$\mathrm{in}(\boldsymbol{a})^r \subset \mathrm{in}(\boldsymbol{a}^r) \subset J^{[q]}$$

なので, 一般に

$$c^J(\in (\boldsymbol{a})) \leq c^J(\boldsymbol{a})$$

がわかる. ゆえに定理で $\boldsymbol{a}$ は単項式で生成されると仮定して証明すれば良い.

予想 9′ を単項式で生成されるイデアルに対して証明しよう. I を $J^{[q]}$ に含まれる単項式で生成された整閉イデアルとする. P_I を I の Newton Polygon とする.

$$P_I = \bigcup_{X^m \in I} m + \mathbb{R}^d_{\geq 0} \text{の凸閉包} \subset \mathbb{R}^d_{\geq 0}.$$

すると $I \subset J^{[q]}$ なので,

$$P_I \subset \{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_i \geq n_i q \ (\imath = 1, \ldots, d)\}.$$

なお, $\Delta_I = \mathbb{R}^d_{\geq 0} \setminus P_I$ とおき, ∂P_I を P_I の境界とする. このとき

$$l_A(A/I) = \mathrm{volume}\Delta_I + O(q^{d-1})$$

である. 我々はこの条件の下で, Δ_I の volume が最大になるときを考えればよいので, $(qn_1, \ldots, qn_d) \in \partial P_I$ と仮定して良い. ∂P_I は一般には超平面分の和集合だが, Δ_I の volume を最大にするためには ∂P_I が超平面 H の第 1 象限の部分として良い. H の方程式を $x_1/a_1 + \ldots + x_d/a_d = 1$ とするとき, $l_A(A/I) = \dfrac{a_1 \cdots a_d}{d!} + O(q^{d-1})$ である. 一方平面 H が点 $(qn_1, \ldots, qn_d)$ を通るので,

$$\frac{qn_1}{a_1} + \ldots \frac{qn_d}{a_d} = 1$$

であり, 再び相加相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{d^d} \geq q^n \frac{n_1 \cdots n_d}{a_1 \cdots a_d}$$

を得る. これより直ちに

$$l_A(A/I) \geq \frac{d^d}{d!} q^n (n_1 \cdots n_d) - O(q^{d-1}) = l_A(A/J^{[q]}) - O(q^{d-1})$$

が従う.

§4. Roots of Bernstein-Sato Polynomials.

$f \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ に対して,

$$b_f(s)f^s = P(s,X,\partial_X) \bullet f^{s+1}.$$

をみたす $b_f(s) \in \mathbb{Q}[s]$ が定まる. ここで $P(s,X,\partial_X)$ は X,∂_X,s の多項式で微分作用素として f に作用する.

この $b_f(s)$ を **b 関数**または, **Bernstein-Sato polynomial** という. この b 関数の根を (全部ではないが) 標数 $p>0$ の手法で求められるというのが, Mustaţă の発見した大変興味深い事実である (b 関数の根は有理数であるという事実が柏原正樹氏によって知られている). (b 関数に関しては, 本報告集の斎藤盛彦氏の稿参照.) この事実のキーになるのは次の単純な事実である. なお, ここでは $f \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_d]$ とする.

Proposition 11. $f \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_d]$, J を $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_d]$ のイデアルとする. f,J の $\mathbb{F}_p$ への reduction を f_p, J_p と書くと,

$$b_f(\nu_{f_p}^{J_p}) = 0.$$

[証明] $\nu = \nu_{f_p}^{J_p}$ とおくと, 定義により, $f_p^\nu \notin J^{[q]}, f^{\nu+1} \in J^{[q]}$. $b_f(s)$ の定義より, $b_f(\nu)f_p^\nu = P_p(s,X,\partial_X) \bullet f_p^{\nu+1}$ だが, 如何なる微分作用素 P に対しても $P_p(J^{[q]}) \subset J^{[q]}$. $b_f(\nu)f_p^\nu \in J^{[q]}, f_p^\nu \notin J^{[q]}$ なので, $b_f(\nu)=0$ でなければならない.

Example 12. $f = X^a + Y^b \in \mathbb{Z}[X,Y]$, $(a,b)=1$ とする. $p \equiv i \pmod a$, $p \equiv j \pmod b$ とする. このとき, $p = an+i = bm+j$ とおくと, $f_p^{n+m} \notin (X,Y)^{[p]}, f_p^{n+m+1} \in (X,Y)^{[p]}$ が容易にわかるので,

$$\nu_f(p) = n+m = \frac{p-i}{a} + \frac{p-j}{b} \equiv -\left(\frac{i}{a}+\frac{j}{b}\right) \bmod p$$

である (ここで $\nu_f^{(X,Y)}(p)$ を $\nu_f(p)$ と書いた). ゆえに $b_f\left(-\frac{i}{a}-\frac{j}{b}\right) \equiv 0 \pmod p$ がわかる. このような p は無限個あるから (Dirichlet 算術級数定理), $b_f\left(-\frac{i}{a}-\frac{j}{b}\right) = 0$ がわかる. この場合は $b_f(s)$ の根は

$$\{-\frac{i}{a}-\frac{j}{b} \mid 0<i<a, 0<j<b\} \cup \{-1\}$$

が知られている (次の定理 13 参照). もう 1 つの根 -1 は例えば $p \equiv -1 \pmod a$, $p \equiv -1 \pmod b$ とすると,

$$\nu_f(p^2) = p\left(\frac{p-a+1}{a} + \frac{p-b+1}{b}\right) + (p-1) \equiv -1 \bmod p$$

から得られる.

$b_f(s)$ の根がすべて得られるわけではないが，このように簡単に得られることに注目したい.

このテーマのより詳しい情報は [MTW] を参照して下さい.

付記 (1) F-thresholds のより整理された理論については [MTW2] 参照.

(2) この稿では割愛したが，研究集会では mutiplier ideal に関するいくつかのトピックを話した. 剰余体が代数閉体である 2 次元 regular local ring において任意の整閉イデアルは multiplier ideal である. 即ち，$\mathcal{J}(\boldsymbol{a}^s)$ の形であることを [LW] で示した (実際は regular を少し弱めて，2 次元 log terminal で成立する). しかし，3 次元以上の regular ring に於ても，multiplier ideal はかなり特別な形の free resolution を持つことを Kyoungyong Lee - R. Lazarsfeld が示した [LL]. 従って，3 次元以上では，一般の整閉イデアルは multiplier ideal ではない.

References

[BMS] M.Blickle, M.Mustaţă and K.Smith, Discreteness and rationality of F-thresholds, math.AG/0607660, Jul. 26, 2006.

[DEM] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Multiplicities and log canonical threshold, arXiv: math.AG/0205171, J. Algebraic Geom. **13** (2004), 603-615.

[HW] N. Hara and K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 363–392.

[HY] N. Hara and K. Yoshida, A generalization of tight closure and multiplier ideals, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3143–3174.

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[HR] M. Hochster and J. Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. Math. **21** (1976), 117–172.

[LL] R. Lazarsfeld and K. Lee, Local syzygies of multiplier ideals, mathAG/0604563.

[LW] J. Lipman and K.-i. Watanabe, Integrally closed ideals in two-dimensional regular local rings are multiplier ideals, Math. Reasearch Letters **10**, 423–434 (2003).

[MTW] M. Mustaţă, S. Takagi and K.-i. Watanabe, F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials, (math.AG/0411170) Proc. 4ECM Stockholm 2004, 341-364.

[MTW2] M. Mustaţă, S. Takagi and K.-i. Watanabe, F-thresholds with applications to integral dependence and multiplicity, in preparation.

[NW] Nakajima, H. and Watanabe, K. , The classification of qoutient singularities which are complete intersections, in “Complete Intersections, S. Greco and R. Strano (eds.), Springer L.N. 1092 (1984), 102-120.